



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală, 17 februarie 2024

Clasa a VI-a – soluții și bareme

Notă: Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător!

Problema 1

Demonstrați că, dacă are loc egalitatea $2a+13b=11c$, atunci $(a+b)(b+c)(c+a) : 286$, pentru a, b, c numere naturale.

SGM 9/2023

Soluție: $2a+13b=11c \text{ } /+11a \Rightarrow 13a+13b=11a+11c \dots\dots\dots 1 \text{ p}$
 $13(a+b)=11(a+c), \dots\dots\dots 1 \text{ p}$
 $(13,11)=1 \Rightarrow (a+b) : 11, (a+c) : 13 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$
 $2a+13b=11c \text{ } /+11b \Rightarrow 2a+24b=11b+11c \dots\dots\dots 1 \text{ p}$
 $2(a+12b)=11(b+c), (2,11)=1 \Rightarrow (b+c) : 2 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$
 $2, 11, 13$ numere prime atunci $(a+b)(b+c)(c+a) : 11 \cdot 2 \cdot 13 = 286 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

Problema 2

Numerele $x+y$, $y+z$ și $z+x$ sunt direct proporționale cu numerele 4, 6 și 8.

- Aflați valoarea raportului $\frac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2}$.
- Dacă a, b, c sunt cifre diferite nenule, determinați valoarea minimă și maximă a raportului $\frac{axy+bxz+cyz}{x^2+y^2+z^2}$.

Soluție: $\frac{x+y}{4} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{8} = k \dots\dots\dots 1 \text{ p}$
 $x+y=4k, y+z=6k, z+x=8k, x+y+z=9k \dots\dots\dots 1 \text{ p}$
 $x=3k, y=k, z=5k \dots\dots\dots 1 \text{ p}$
 $\frac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2} = \frac{23k^2}{35k^2} = \frac{23}{35} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$
 $\frac{axy+bxz+cyz}{x^2+y^2+z^2} = \frac{3ak^2+15bk^2+5ck^2}{35k^2} = \frac{3a+15b+5c}{35} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$
 Valoarea maximă a raportului, când $b=9, c=8, a=7$ este $\frac{28}{5} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$
 Valoarea minimă a raportului, când $b=1, c=2, a=3$ este $\frac{34}{35} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$



Problema 3

Fie $A = \{2^p \cdot 5^n | p, n \in \mathbb{N}, p \leq 100, n \leq 100\}$.

- Câte numere din mulțimea A nu au ultima cifră egală cu 0 ?
- Câte numere din mulțimea A se divid cu 10^4 dar nu se divid cu 10^5 ?
- Aflați cel mai mare număr din mulțimea A cu proprietatea $2p+3n=40$.

Soluție:

- Dacă $p=0, n \geq 1$ forma numerelor va fi 5^n deci vor fi 100 numere.....1p

Dacă $n=0, p \geq 1$ forma numerelor va fi 2^p deci vor fi 100 numere.....1p

Dacă $n=0, p=0 \Rightarrow 1$ număr \Rightarrow total: $100+100+1= 201$ numere.....1p
- Dacă $p=4$ și $n \geq 5$ sunt 96 numere.....1p

Dacă $n=4$ și $p \geq 5$ sunt 96 numere.....1p

Dacă $n=4, p=4 \Rightarrow 1$ număr \Rightarrow total: $96+96+1= 193$ numere.....1p
- $M_2+M_3=40, 4+36=40$ deci $p=2$ și $n=18$, cel mai mare număr din mulțimea A este $2^2 \cdot 5^{18}$1p

Problema 4

Se consideră unghiurile adiacente și suplementare AOB și BOC , $m(\angle AOB) > 90^\circ$, punctele M, N, P în interiorul unghiului AOB astfel încât $\angle AOM = \angle MON = \angle NOP = \angle POB$ și (OR bisectoarea unghiului BOC).

- Dacă $OT \perp OR$ astfel încât punctul C să fie în interiorul unghiului ROT, arătați că $\angle TOC = \angle BON$.
- Dacă (OS este semidreapta opusă semidreptei (OP și $m(\angle AOS) = 97^\circ 30'$ să se determine măsura unghiului MOR.

Soluție: a) (ON bisectoarea $\angle AOB$, (OR bisectoarea $\angle BOC$, $\angle AOB$ și $\angle BOC$ adiacente și suplementare atunci $\angle NOR = 90^\circ$ 2 p

$$\angle TOC = 90^\circ - \angle ROC$$

$$\angle BON = 90^\circ - \angle ROB$$

(OR bisectoarea unghiului $BOC \Rightarrow \angle ROC = \angle ROB \Rightarrow \angle TOC = \angle BON$2 p

b) $\angle AOM = \angle MON = \angle NOP = \angle POB = x$, $\angle ROC = \angle ROB = y \Rightarrow 4x + 2y = 180^\circ \Rightarrow 2x + y = 90^\circ$ 1p

$\angle AOS = \angle POC = 97^\circ 30'$ (opuse la vârf) $\Rightarrow x + 2y = 97^\circ 30' \Rightarrow 2x + 4y = 195^\circ$ 1p

$x = 27^\circ 30', y = 35^\circ \Rightarrow \angle MOR = 3x + y = 117^\circ 30'$ 1p



MINISTERUL EDUCAȚIEI



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN TULCEA

